Разберём отличия фазовой и групповой скоростей.

Теорминимум, который нужно знать и который я сейчас дам постулатом:

Групповая – «реальная» скорость, имеющая физический смысл – скорость переноса энергии. Т.к. она реальна, она заведомо не превосходит с = 300 тыс.км/с
Фазовая – «нереальная», характеризующая скорость переноса синусоиды с частотой ω. Т.к. она нереальна, она может быть запросто больше с.
И сразу: в анизотропных кристаллах групповая скорость называется лучевой.

А теперь давайте разбираться.

Часть 1, с поездом
В Вики https://ru.wikipedia.org/wiki/Групповая_скорость есть классная анимашка. Посмотрите. А сейчас пояснения:

Представим себе пассажирский поезд дальнего следования из нескольких вагонов. У него какая-то скорость. Скорость каждого вагона – групповая скорость.
Но во время движения по вагонам активно бегают пассажиры – бегают туда-сюда. Чтобы не мучиться с началом и конца поезда, можете считать, что они «отражаются» от концов вагона, сохраняя скорость. ~~Я так тоже бегал, когда свободный туалет искал.~~

Вот скорости движения пассажиров – это фазовые скорости. Заметьте, что в некотором роде они не влияют на ход поезда. Как говорится, «собаки лают – караван идёт».

Вернитесь к анимашке https://ru.wikipedia.org/wiki/Групповая_скорость . Зелёные точки - точки «стыка» вагонов, а красная – один из пассажиров. Он, правда, не отражается от конца вагона, а перебегает в соседний вагон (так что будет удобно считать поезд бесконечным, чтобы не мучиться с головой и хвостом).

Откуда вообще фазовая скорость взялась? Потому что физики (особенно в оптике и радиофизике) очень любят всё раскладывать по синусам-косинусам.
Любую функцию $f(x,t)$, которая смахивает на волну, они записывают как

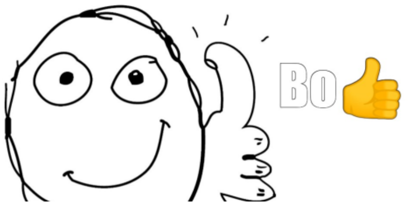
$$f(x,t) = \int_0^\infty a_\omega \cos(\omega t - kx)\, d\omega$$

(a_ω - амплитуда гармоники частоты ω)
где соотношение $\frac{\omega}{k}$ они называют фазовой скоростью волны на частоте ω. Можно и так записать:

$$f(x,t) = \int_0^\infty a_\omega \cos(\omega t - \frac{\omega x}{v(\omega)})\, d\omega$$

Вот эту скорость и назвали фазовой. Т.е. фазовая скорость волны частоты ω – это скорость конкретно синусоиды частоты ω ***в составе большого волнового фронта!***

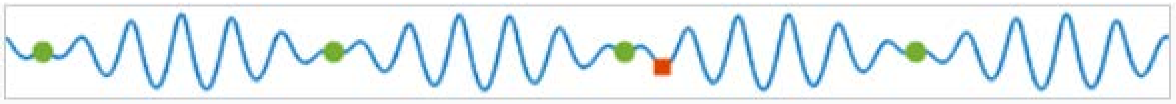
Тут надо понять, что вообще природа не планировала, что её будет по синусам и косинусам раскладывать. В фундаментальных уравнения Максвелла синусов и косинусов нет. Это человечество решило, что разложение по синусам и косинусам



- ну и ешьте с кашей результат ваших фантазий.

Ещё одно интересное рассуждение. Вернёмся к примеру с поездом и анимашке. Вот, смотрите, красная точка-пассажир добежала до конца своего вагона:

и вот уже она в новом вагоне:



А теперь давайте посмотрим с другой стороны. Что, если она вместо перескока в другой вагон… телепортировалась в начало своего же?

А в «новом», правом вагоне на её месте её коллега – коричневая точка (тоже испытавшая телепорт от правого конца «своего» вагона.
А что, кто сказал, что телепорт невозможен? Для физических частиц – да. Но когда идёт речь лишь о максимумах-минимумах на синусоиде – да как раз плюнуть. (Аналогично тень от предмета, не являясь материальным объектом, также может двигаться быстрее скорости света).

А что же тогда абсолютно в этом относительном мире? Вагоны их групповая скорость!

Тут, правда, у читателя может возникнуть другой вопрос: ты так красиво унизил фазовую скорость – но, может, и групповую так можно? Может, всё тлен, ~~физика тлен~~?

Часть 2 – волны, волнообразные и лаборант Иванов

Я называю волной функции вида

$$f(x,t) = F(x - vt)$$

Т.е. функции 2 переменных, сводящихся к функции 1 переменной. v - единственная скорость, одинаковая у всех гармоник (и не только синусов и косинусов – любого исходного сигнала). Естественно, она и фазовая, и групповая.

Помимо волн, есть ***волнообразные*** функции $f(x,t)$. Вон та функция с анимашки – волнообразная функция. Она уже не представима в виде функции 1 переменной $F(x - vt)$. Причём сумма двух волн запросто может быть не волной, а лишь волнообразной (пример: https://www.desmos.com/calculator/fc6htfkupf) – если $v(\omega)$ не константа.

На практике нам приходится работать именно с волнообразными. И все наши проблемы от того, что мы пытаемся «перетащить» понятие из волн на волнообразные.

Задача 1.

Лаборант Иванов брал кристалл и пропускал через него синусоидальные волны различных частот, измеряя скорость. Получил такую табличку:

Частота	Скорость
ω_1	v_1
ω_2	v_2
ω_3	v_3

Какую именно скорость замерял Иванов?

Ответ: и фазовую, и лучевую. У него была волна, а не волнообразная.
Можно сказать и так: фазовую – потому что это скорость движения синусоиды с частотой ω; лучевую – потому что имеет физ.смысл (лаборант Иванов наверняка мерял длину кристалл на время между импульсами с датчиков) – и из равенства фазовой и лучевой скорости сделать вывод, что волна, а не волнообразная.

Задача 2.

Но всё меняется, если Иванов решает включить два лазера – с частотами ω_1 и ω_2 одновременно.
Итак, датчик слева засекает пуск импульса. Через сколько времени он достигнет правого конца кристалла (l - его длина). $\frac{l}{v_1}$? $\frac{l}{v_2}$?

Как вы уже догадываетесь, неправильно ни то, ни другое. $\frac{l}{v_1}$и $\frac{l}{v_2}$ - это две фазовые скорости, а ответом должна быть групповая. (формулу для неё я вам тут не дам, не надейтесь).

В общем случае определить скорость для волнообразных невозможно.
Разделяют два случая волнообразных, где это всё-таки удаётся.
1) Сумма двух волн разных периодов, отличающихся на порядок или больше. Именно такая была на анимашке.
Пример: https://www.desmos.com/calculator/xe9ekmffln . Запустите у себя и увидите: собаки лают – караван идёт, люди бегают – поезд идёт. Групповая скорость в этом случае равна меньшей из фазовых.
2) Квазимонохроматические сигналы. Их обожают на оптике, и не зря – монохроматические сигналы нам только снятся, на самом деле мир полон квазимонохроматических. Это те, чей спектр по частоте нормален:

$$a_\omega = a_0 \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Или же прямоуголен:

$$a_\omega = a_0, \text{если } \omega \text{ между } \omega_0 - \sigma, \omega_0 + \sigma, \text{иначе } 0$$

Например, солнечный свет. Его максимум ω_0 приходится на зелёный цвет ω_0 (около 550 нм, пишу на память).

Задача 3.
Лаборант Иванов спрашивает, что ему нужно сделать, чтобы узнать скорость прохождения солнечного луча сквозь стекло.

Ответ: намерить 100500 скоростей волн (именно волн, а волнообразных)

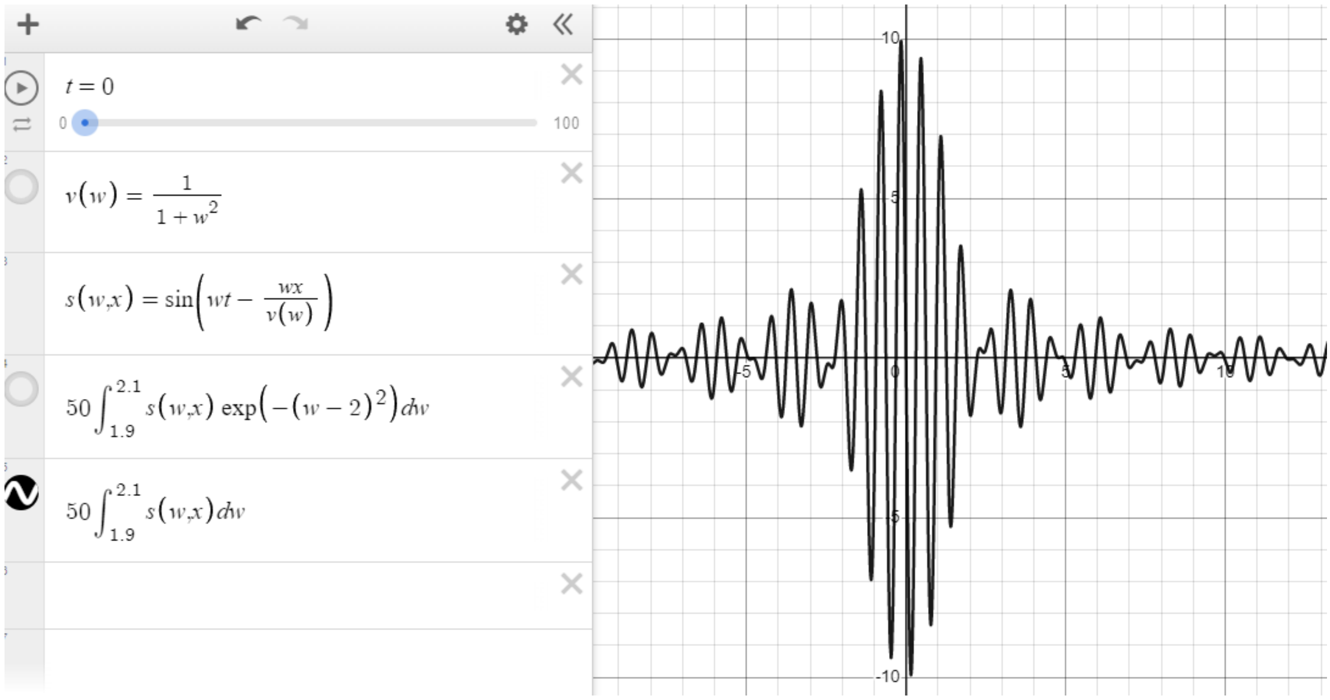
Частота	Скорость
ω_1	v_1
ω_2	v_2
ω_3	v_3

В окрестности зелёного света. (Вероятно, для этого ему потребуется 100500 лазеров).
А затем подсчитать численно производную $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$. Это и будет ответ.

Формула $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$ имеет вывод, вроде он даётся в учебниках по оптике, но это неточно.

Таким образом, если вам кто-то предлагает применить формулу $\frac{d\omega}{dk}$ для «поездатой» анимашки, посылайте его – это совершенно разные случаи, $\frac{d\omega}{dk}$ только для гармонических сигналов.

Задача 4.

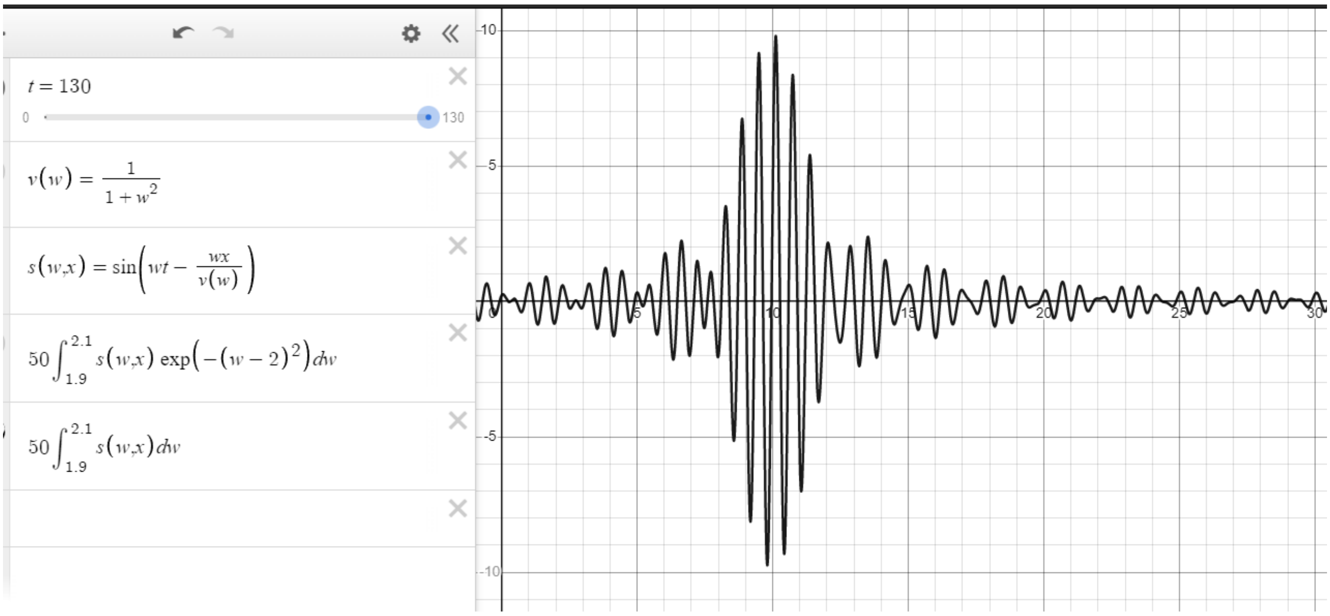


С какой скоростью будет двигаться тот цуг вправо?
https://www.desmos.com/calculator/ddawdxjqwq

Решение: нужно взять $\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{v(\omega)}\right)} = \frac{d\omega}{\frac{1}{v(\omega)}d\omega + \omega d\frac{1}{v(\omega)}} = \frac{1}{\frac{1}{v(\omega)} + \omega\frac{d\frac{1}{v(\omega)}}{d\omega}}$ в точке $\omega = 2$:

$$\frac{1}{1+\omega^2+\omega\frac{d(1+\omega^2)}{d\omega}} = \frac{1}{1+\omega^2+2\omega^2} = \frac{1}{1+3\omega^2}$$

В точке 2 это $\frac{1}{13}$. Значит, через 130 секунд пик должен переехать на координату 10. Проверяем:



ч.т.д.

Закон дисперсии $v(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$ взят мною от балды, читатель может придумать свой. Только важно, чтобы скорость v спадала с ростом ω (т.е. чтобы $\frac{dv}{d\omega} < 0$ при любых $\omega < 0$) – иначе цуг поедет влево, а не вправо (в чём читатель также может убедиться).